ACCADEMIA NAVALE

A.N. AN 51

Concorso Allievi Ufficiali
1ª Classe Corsi Normali

ESERCIZI SVOLTI DI ALGEBRA, GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

utili alla preparazione dell'esame orale di matematica

A cura della Direzione Studi

POLIGRAFICO ACCADEMIA NAVALE
LIVORNO – 1^ Edizione
Febbraio 2021

Esercizi svolti di algebra, geometria e trigonometria

utili alla preparazione dell'esame orale di matematica

Introduzione

La presente raccolta di esercizi nasce con lo scopo di dotare di una guida gli studenti che intendono partecipare al concorso per l'ammissione in Accademia Navale.

Gli esercizi svolti fanno riferimento solo ad alcuni argomenti del programma di concorso e non vogliono rappresentare esercizi tipo sui quale allenarsi.

La linea guida che un candidato deve seguire è quella del ragionamento fondato su buone conoscenze e capacità di sintesi (acquisiti nei primi quattro anni della Scuola Media Superiore).

Esercizi di algebra

1. Determinare due interi positivi a, b sapendo che

$$a + b = 3000,\ a = 17b + r \quad \text{con } 0<r<b.$$

2. Determinare il MCD dei numeri aventi la forma

$$n^5 + n^3 - 5n$$

con n intero tale che $n > 2$.

3. **a)** Dimostrare che il numero $1+\sqrt{2}$ non è razionale.
b) Dimostrare che sommando, moltiplicando e dividendo numeri della forma $x + y\sqrt{2}$ (con x e y razionali), si ottengono sempre numeri dello stesso tipo.

4. Dimostrare che per ogni coppia a, b di numeri reali, non entrambi nulli, risulta

$$a^2 + b^2 > ab.$$

5. Dimostrare che la media geometrica di due numeri x, y non supera la media aritmetica.

6. Risolvere l'equazione

$$6x^4 - 31x^3 + 60x^2 - 51x + 14 = 0$$

sapendo che il prodotto di due soluzioni è 1.

7. Determinare le soluzioni intere di

$$y^3 - x^3 = 91.$$

8. Risolvere l'equazione

$$\frac{x+a}{x} - \frac{1}{x+a} = 1.$$

9. Assegnato il polinomio

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + \alpha x + \mu$$

Determinare i numeri reali α e μ in modo che $P(x)$ risulti divisibile per $x - 1$ e per $x + 1$. Risolvere, poi, la disequazione $P(x)>0$.

10. Eseguire la divisione del polinomio x^4 per il polinomio $x^2 + 1$ ed esprimere con un'uguaglianza il significato della operazione eseguita.

11. Ridurre il seguente gruppo di radicali al medesimo indice, avendo indicato con x un numero reale qualunque

$$\sqrt{x^2 - x}\,,\ \sqrt[5]{x}\,,\ \sqrt[12]{x^2}\,.$$

12. Eseguire le seguenti operazioni

$$\frac{\sqrt{x^3 + x^2} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}}\,.$$

13. Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} < \frac{x - 1}{x + 1}.$$

14. Risolvere la seguente disequazione

$$(x - a)\sqrt{1 - \frac{|x|}{x - a}} > 0.$$

15. Risolvere la seguente disequazione

$$\log_2\left(a + \sqrt{x^2 - ax}\right) > \log_2|x|.$$

16. Risolvere la disequazione

$$\log_h(x^2 - 5x + 6) > 1.$$

17. Risolvere la disequazione

$$2^x \cdot 3^{\frac{1}{x-1}} > 2.$$

18. Risolvere la seguente equazione

$$2^{2x} - a2^{x+1} + a + 2 = 0.$$

19. Risolvere la seguente disequazione

$$h^{2x} - h^{x} - 6 > 0.$$

20. Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{log_3 a^4}{\sqrt{a^2-1}} x > 1 \\ x > \frac{1}{log_3 a^2} \end{cases}.$$

Risoluzione degli esercizi di algebra

1. Se a =17b + r con 0<r<b, si ha $\frac{a}{b} = 17 + \frac{r}{b}$; essendo $\frac{r}{b} < 1$ risulta 17<$\frac{a}{b}$ <18. Pertanto il problema è soddisfatto dagli interi a e b tali che

$$\begin{cases} a + b = 3000 \\ 17\,b < a < 18b \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{cases} a + b = 3000 \\ 17\,b + b < a + b < 18b + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3000 \\ 18b < 3000 < 19b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3000 \\ 157 < b < 167 \end{cases}.$$

Si trova

(2842, 158), (2841, 159), (2840, 160), (2839, 161), (2838, 162), (2837, 163), (2836, 164), (2835, 165), (2834, 166).

2. Se

n=2 si ha $n^5 + n^3 - 5n = 2 \cdot 3 \cdot 5$

n=3 si ha $n^5 + n^3 - 5n = 3 \cdot 5 \cdot 17$

n=4 si ha $n^5 + n^3 - 5n = 2^2 \cdot 3 \cdot 89$

pertanto, il MCD è 1 oppure è 3. Proviamo che è 3.

Se n è multiplo di 3 allora $n^5 + n^3 - 5n$ è divisibile per 3.
Se n non è multiplo di 3, ossia

a) $n = 3m + 1$, b) $n = 3m + 2$

si ha

- caso a)

$$n^5 + n^3 - 5n = (3m + 1)^5 + (3m + 1)^3 - 5(3m + 1)$$

e i numeri

$$(3m + 1)^5 \quad , \quad (3m + 1)^3 \quad , \quad -5(3m + 1)$$

divisi per 3 danno resto 1;

- caso b)

$$n^5 + n^3 - 5n = (3m + 2)^5 + (3m + 2)^3 - 5(3m + 2)$$

e i numeri

$$(3m+2)^5 \quad , \quad (3m+2)^3$$

divisi per 3 danno resto 2, mentre il numero $-5(3m+2) = -5 \cdot 3m - 9 - 1$, diviso per 3 , dà resto -1. In ogni caso la somma dei resti è uguale a 3, pertanto, il numero $n^5 + n^3 - 5n$ è divisibile per 3.
Concludendo il MCD è 3.

3. **a)** Se 1+ $\sqrt{2}$ fosse un numero razionale $\frac{m}{n}$, si dovrebbe avere $\sqrt{2}$= $\frac{m}{n}$ -1. Di conseguenza $\sqrt{2}$ sarebbe razionale e questo è falso.
b) Si ha

$$(x + y\sqrt{2}) + (z + w\sqrt{2}) = (x + z) + (y+w)\sqrt{2}$$
$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + w\sqrt{2}) = (xz + 2yw) + (xw + yz)\sqrt{2}$$

Infine, se *z* e *w* non sono entrambi nulli, si ha

$$\frac{(x+y\sqrt{2})}{(z+w\sqrt{2})} = \frac{(x+y\sqrt{2})\cdot(z-w\sqrt{2})}{(z+w\sqrt{2})\cdot(z-w\sqrt{2})} = \frac{(xz-2yw)}{z^2-2w^2} + \frac{(-xw+yz)}{z^2-2w^2}\sqrt{2}\ .$$

Pertanto, sommando, moltiplicando e dividendo numeri della forma $x + y\sqrt{2}$ (con *x* e *y* razionali), si ottengono sempre numeri dello stesso tipo.

4. Se $ab < 0$, $a^2 + b^2 > ab$ è verificata.
Se $ab > 0$, dividendo per *ab* si ha

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 1$$

relazione verificata giacché se $\frac{a}{b} < 1$ allora $\frac{b}{a} > 1$ e se $\frac{b}{a} < 1$ allora $\frac{a}{b} > 1$.

5. Si deve provare che

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

per ogni coppia *x*, *y* di numeri reali non negativi. Si ha

$$4xy \leq x^2 + 2xy + x^2$$

ossia

$$(x-y)^2 \geq 0$$

relazione senz'altro vera.

6. L'equazione è equivalente a:

$$x^4 - \frac{31}{6}x^3 + 10x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{7}{3} = 0$$

Ora, se tale equazione ha due soluzioni il cui prodotto è 1, si può scomporre il polinomio al primo membro nel prodotto di due polinomi di secondo grado uno dei quali avente per termine noto il numero 1. Si ha pertanto

$$x^4 - \frac{31}{6}x^3 + 10x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{7}{3} = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + c) =$$
$$= x^4 + (a+b)x^3 + (ab + c + 1)x^2 + (ac + b)x + c$$

ossia

$$\begin{cases} a + b = -\frac{31}{6} \\ ab + c + 1 = 10 \\ ac + b = \frac{17}{3} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Si trova $a = -\frac{5}{2}$, $b = -\frac{8}{3}$, $c = \frac{7}{3}$.

Dunque, l'equazione data è equivalente a:

$$\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}\right) = 0$$

le cui soluzioni sono $x = \frac{1}{2},\ x = 2$.

7. Le soluzioni intere dell'equazione assegnata sono le soluzioni intere dell'equazione

$$(y-x)\,(y^2 + xy + x^2) = 13 \cdot 7$$

e dell'equazione

$$(y-x)\,(y^2 + xy + x^2) = 91 \cdot 1.$$

Si tratta quindi di risolvere i sistemi

$$\begin{cases} y - x = 13 \\ y^2 + xy + x^2 = 7 \end{cases},\quad \begin{cases} y - x = 7 \\ y^2 + xy + x^2 = 13 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y - x = 91 \\ y^2 + xy + x^2 = 1 \end{cases},\quad \begin{cases} y - x = 1 \\ y^2 + xy + x^2 = 91 \end{cases}.$$

Di questi solo l'ultimo ha soluzioni intere e sono

y=6 , x=5 oppure y= -5 , x= -6.

8. L'equazione ha significato per qualunque valore di a ed è equivalente all'equazione

$$\frac{x(a-1)+a^2}{x(x+a)} = 0$$

la quale è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x(a-1) = -a^2 \\ x \neq 0 \\ x \neq -a \end{cases} .$$

i) Se a=1, l'equazione è impossibile.

ii) Se $a \neq 1$, la prima equazione del sistema ha la soluzione $x = \frac{a^2}{1-a}$ che, per essere soluzione del sistema, deve verificare le due condizioni

$$\frac{a^2}{1-a} \neq 0 \quad , \quad \frac{a^2}{1-a} \neq -a$$

le quali sono verificate solo se $a \neq 0$.
Concludendo se a=1 oppure a=0 l'equazione è impossibile, se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ l'equazione ha l'unica soluzione data da $x = \frac{a^2}{1-a}$.

9. Affinché $P(x)$ risulti divisibile per x-1 e per x+1 dovrà essere $P(1) = 0$ e $P(-1) = 0$ ossia

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -8 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases} .$$

Si ha $\lambda = -3$, $\mu = -5$ e risulta $P(x) = (x^2-1)(x^2+3x+5)$. Pertanto

$$P(x) > 0 \text{ se e solo se } x^2 - 1 > 0$$

ossia x< -1, x>1 .

10. Il quoziente Q della divisione del polinomio $M(x) = x^4$ per il polinomio $N(x) = x^2 + 1$ è $Q(x)$= $x^2 - 1$ e il resto è $R(x)$=1.
Pertanto, dall'essere $M(x) = N(x)Q(x) + R(x)$ si ha

$$x^4 = (x^2+1)\,(x^2-1\,)+1.$$

11. I tre radicali sono definiti sia per $x \leq 0$ sia per $x \geq 1$. Osservato che

$$\sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{|x|}\ ,$$

si possono ridurre i radicali dati in radicali di indice 30. Quindi risulta:

$$\sqrt{x^2 - x} = \sqrt[30]{(x^2 - x)^{15}},$$

$$\sqrt[12]{x^2} = \sqrt[30]{|x|^5},$$

$$\sqrt[5]{x} = \frac{x}{|x|}\ \sqrt[30]{x^6}.$$

12. L'espressione è definita per i valori di x tali che $-1 \leq x < 0$ oppure $x > 0$. Essendo

$$\sqrt{x^3 + x^2} = |x|\sqrt{x+1}$$

risulta

$$\frac{\sqrt{x^3 + x^2} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{|x|\sqrt{x+1} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}}$$

E quindi se $x > 0$ la quantità è nulla. Se invece $-1 \leq x < 0$, osservato che

$$\sqrt[3]{x} = \frac{x}{|x|}\ \sqrt[6]{x^2}\ ,$$

si ha

$$\frac{|x|\sqrt{x+1} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-2x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}} = -2\sqrt[6]{(x+1)^3x^4}.$$

13. La disequazione, che ha senso per $a \geq 0$, è definita per $x \geq 0$, ma $x \neq a$. Essa è equivalente a

$$\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)(x+1)} < 0.$$

Essendo $x \geq 0$, la disequazione è equivalente a

$$\sqrt{a} - \sqrt{x} < 0$$

E dunque a

$$x > a.$$

14. La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - a > 0 \\ 1 - \dfrac{|x|}{x-a} > 0 \end{cases}$$

che è equivalente, a sua volta, a

$$\begin{cases} x-a>0 \\ x-a>|x| \end{cases}$$

Si conclude che non esistono soluzioni se $a \geq 0$, mentre per $a<0$ le soluzioni sono

$$x>\frac{a}{2}\ .$$

15. Per ogni valore di a, disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-ax}>|x|-a \\ x^2-ax>0 \end{cases}.$$

Se $a>0$, il sistema è equivalente alla unione dei seguenti

$$\begin{cases} x^2-ax>(x-a)^2 \\ x>a \end{cases}, \quad -a<x<0\,, \quad \begin{cases} x^2-ax>(-x-a)^2 \\ x \leq -a \end{cases},$$

unione che è verificata sia dalle *x* tali che $x>a$, sia dalle x tali che $x<0$.

Per $a \leq 0$, il sistema è invece equivalente all'unione

$$\begin{cases} x^2-ax>(-x-a)^2 \\ x<a \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^2-ax>(x-a)^2 \\ x>0 \end{cases}$$

che ha non ha soluzioni.

16. Occorre distinguere due casi:

i) se $0<h<1$, la disequazione proposta è equivalente a

$$\begin{cases} x<2,\ \ x>3 \\ x^2-5x+6-h<0 \end{cases},$$

ossia

$$\begin{cases} x<2,\ \ x>3 \\ x_1<x<x_2 \end{cases},$$

dove $x_1=\frac{5-\sqrt{1+4h}}{2}$ e $x_2=\frac{5+\sqrt{1+4h}}{2}$.

Poiché il polinomio $P(x)=x^2-5x+6$ assume valori negativi in 2 e in 3, le soluzioni della disequazione sono le *x* tali che

$$x_1<x<2,\ \ 3<x<x_2;$$

ii) se $h>1$, la disequazione data è invece equivalente a

$$x^2-5x+6>h\ ,$$

che ha per soluzioni i valori di *x* tali che

$$x<x_1, \qquad x>x_2.$$

17. Osservato che

$$3^{\frac{1}{x-1}}=2^{\frac{\log_2 3}{x-1}}$$

La disequazione può scriversi nella forma equivalente

$$2^{x+\frac{\log_2 3}{x-1}}>2$$

e pertanto la disequazione diventa

$$x + \frac{\log_2 3}{x-1} > 1.$$

Le uniche soluzioni sono le x tali che $x > 1$: è ovvio che tali x risolvono perché, se $x > 1$ il primo addendo è una quantità superiore ad 1; a questo si aggiunge una quantità positiva e quindi la somma supera 1. Se invece $x<1$, il primo membro risulta la somma di una quantità minore di 1 con una quantità negativa, quindi non può superare 1.

18. Posto $t = 2^x$, l'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} t^2 - 2at + a + 2 = 0 \\ t = 2^x \end{cases}$$

Il trinomio ha radici se e solo se $a \leq -1$ oppure $a \geq 2$. Le radici sono

$$t_1 = a - \sqrt{a^2 - a - 2}, \quad t_2 = a + \sqrt{a^2 - a - 2}.$$

Se $a = -2$ il trinomio ha una radice nulla e una negativa, quindi il sistema è impossibile; se $a < -2$ si ha una sola radice positiva e quindi l'unica soluzione

$$x = \log_2(a + \sqrt{a^2 - a - 2}).$$

Se invece $-2 < a \leq -1$ si hanno una o due radici negative e quindi nessuna soluzione per l'equazione data. Se $a > 2$ ci sono due radici positive e quindi due soluzioni:

$$x_1 = \log_2(a - \sqrt{a^2 - a - 2}), \qquad x_2 = \log_2(a + \sqrt{a^2 - a - 2}).$$

Per $a = 2$, l'unica soluzione è $x = 1$.

19. La disequazione ha significato se $h > 0$. Se $h = 1$ la disequazione è impossibile. Dunque, se $h \neq 1$, si pone $h^x = t$ e si studia la disequazione

$$t^2 - t - 6 > 0,$$

che conduce a $h^x < -2$ oppure a $h^x > 3$. Osservato che la prima di queste è impossibile, si ha che , per $0 < h < 1$, l'insieme delle soluzioni è rappresentato dalle x tali che

$$x < \log_h 3.$$

Invece se $h > 1$, l'insieme è dato dalle x tali che

$$x > \log_h 3\ .$$

20. La disequazione ha significato per $|a| > 1$. Dovendo essere

$$\begin{cases} x > \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{4\log_3 |a|} \\ x > \dfrac{1}{2\log_3 |a|} \end{cases}$$

Se $\sqrt{a^2-1} \geq 2,$ ovvero se $|a| \geq \sqrt{5}$, il sistema è verificato per le *x* tali che

$$x > \frac{\sqrt{a^2-1}}{4\log_3|a|}$$

Se invece $1 < |a| < \sqrt{5}$, il sistema è verificato per le *x* tali che

$$x > \frac{1}{2\log_3|a|}$$

Esercizi di geometria e trigonometria

1. Dimostrare che in ogni triangolo la bisettrice di un angolo interno e l'asse del lato opposto si intersecano in un punto della circonferenza circoscritta.

2. Indicati con *M*, *N*, *P*, *Q* i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso di vertici *A*, *B*, *C*, *D* dimostrare che il quadrilatero *MNPQ* è un parallelogramma.

3. Descrivere il luogo geometrico dei centri delle circonferenze passanti per un punto *F* e tangenti ad una retta *d* non passante per *F*.

4. Dimostrare che ogni trapezio inscrivibile in una circonferenza è isoscele.

5. Dati tre punti *A*, *B*, *F* non allineati, determinare le direttrici delle parabole passanti per *A* e *B* ed aventi fuoco in *F*.

6. Considerati i punti

$$A = (-1\,,2) \quad , \qquad B = (3\,,0) \quad , \qquad C = (k\,,k-1)$$

per quali valori del parametro *k* i tre punti sono allineati? Per quali valori di *k* la retta *AB* è perpendicolare alla retta *BC*?

7. Calcolare l'area di un quadrato che ha un vertice nel punto $A = (5\,,3)$ ed un lato contenuto nella retta $r : 2x + 3y = 6$.

8. Determinare il baricentro, l'ortocentro ed il circocentro del triangolo di vertici

$$A = (3\,,2) \quad , \; B = (-2\,,5) \quad , \; C = (0\,,-4) \; .$$

9. Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette di equazione

$$x = 2 \quad , \quad x = 6$$

e tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 16x - 6y + 64 = 0 \quad .$$

10. Dati il punto $A = (1\,,1)$ e la retta $t : 2x + y = 0,$ determinare l'equazione della circonferenza di centro *A* che individua sulla retta *t* una corda di lunghezza 2.

11. Dati i punti $A = (0\,,-2)$ e $B = (4\,,0)$ determinare i punti P della retta $r : x + y + 1 = 0$ tali che il triangolo *APB* sia rettangolo con ipotenusa *AB*.

12. Dato il fascio di parabole di equazione $y = x^2 - 2kx$, scrivere le equazioni del luogo geometrico dei vertici e del luogo geometrico dei fuochi di tale fascio.

13. Assegnati i punti

$$A = (2\,,3) \quad , \quad F_1 = (-2\,,0) \quad , \quad F_2 = (2\,,0)$$

determinare le equazioni dell'ellisse e dell'iperbole di fuochi $F_1\,, F_2$ e passanti per *A*.

14. Determinare, al variare del parametro reale $k \neq 0\,,4$, che cosa rappresenta l'equazione

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4-k} = 1$$

15. Assegnate le circonferenze

$$\gamma_1 : \ (x+4)^2 + y^2 = 4 \quad ; \quad \gamma_2 : \ (x-4)^2 + y^2 = 16$$

determinare il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti a γ_1 e γ_2 esternamente od internamente.

16. Studiare, mediante interpretazione geometrica, la risolubilità al variare del parametro reale *k*, dei seguenti sistemi:

$$\text{a)} \ : \ \begin{cases} y = 2x + k \\ y = x^2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases} \qquad \text{b)} \ : \ \begin{cases} x^2 + (y+k)^2 = 1 + k^2 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

17. Considerato un triangolo rettangolo di ipotenusa *a*, cateti *b* , *c* , angoli opposti ad *a* , *b* , *c* , rispettivamente, $\alpha = \pi/2$, β , γ ed area *A*, risolvere il triangolo nei seguenti casi:

$$i) \quad b = 3 \ , \ c = 4$$
$$ii) \quad c = 2 \ , \ \beta = \pi/3$$
$$iii) \quad b = 2 \ , \ A = 1$$

18. Considerato un triangolo di lati *a*, *b*, *c* ed angoli opposti, rispettivamente, α , β , γ , risolvere il triangolo nei seguenti casi:

$$i) \quad a = 5 \ , \ \alpha = \frac{2}{3}\pi \ , \ \beta = \frac{\pi}{6}$$
$$ii) \quad a = 3 \ , \ b = 2 \ , \ \gamma = \frac{\pi}{3}$$

19. Risolvere la seguente equazione:

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(x-1) \quad .$$

20. Risolvere la seguente equazione:

$$\cos x-\sqrt{3}\sin x+1=0 \quad .$$

21. Risolvere la seguente equazione:

$$\sin^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x\sin x+\sqrt{3}\cos^2 x=0 \quad .$$

22. Risolvere la seguente disequazione:

$$\sin x\cdot\tan x>2\sin x-\cos x \quad .$$

23. Risolvere la seguente disequazione:

$$\sin 3x+\sin x \geq \sin 2x \quad .$$

24. Risolvere la seguente disequazione:

$$\left|2^{\sin x}-4^{\sin x}\right|<\frac{1}{2} \quad .$$

25. Dato un trapezio isoscele *ABCD* inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB=2r$, per quale valore dell'angolo $x=ABC$ il perimetro del trapezio vale $5r$?

Risoluzione degli esercizi di geometria e trigonometria

1. Sia *ABC* un triangolo e sia *K* il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo interno in *A* con la circonferenza circoscritta. Essendo uguali gli archi *BK* e *CK* (su di essi insistono uguali angoli alla circonferenza) sono uguali anche le corde *BK* e *CK* e quindi il punto *K* è equidistante da *B* e *C*, ovvero appartiene all'asse del lato *BC*.

2. Considerata la diagonale *AC* del quadrilatero ed i due triangoli *ABC* e *MBN*, per un corollario del teorema di Talete il segmento *MN* è parallelo ad *AC* ed uguale alla sua metà. Analogamente anche il segmento *PQ* è parallelo ad *AC* ed uguale alla sua metà e quindi per la proprietà transitiva il quadrilatero *MNPQ* ha i due lati opposti *MN* e *PQ* uguali e paralleli. Dimostrando analogamente tale proprietà dei lati *NP* e *QM* si conclude che *MNPQ* è un parallelogramma.

3. Il centro *C* di una tale circonferenza è equidistante dal punto *F* e dalla retta *d* e quindi il luogo geometrico richiesto è la parabola di fuoco *F* e direttrice *d*.

4. Essendo la condizione necessaria e sufficiente per l'inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza che gli angoli opposti siano supplementari, se *ABCD* è il trapezio inscrivibile con base maggiore *AB*, l'angolo in *C*, opposto a quello in *A*, è supplementare dell'angolo in *A*. Per il parallelismo delle basi *AB* e *CD* anche gli angoli in *B* e in *C* sono supplementari e quindi i due angoli in *A* e in *B* sono uguali e quindi il trapezio è isoscele.

5. Per definizione di parabola, la distanza *a* del punto *A* dal fuoco *F* è uguale alla distanza del punto *A* dalla direttrice *d* e quindi la retta *d* è tangente alla circonferenza di centro *A* e raggio a. Analogamente, detta *b* la distanza del punto *B* dal fuoco *F*, la direttrice *d* è tangente alla circonferenza di centro *B* e raggio *b*. Le direttrici richieste sono quindi le tangenti comuni a tali due circonferenze.

6. I coefficienti angolari delle rette *AB* e *BC* sono rispettivamente:

$$m_1 = -\frac{1}{2} \quad , \qquad m_2 = \frac{k-1}{k-3} \quad (\text{se } k \neq 3)$$

pertanto le due rette coincidono (e quindi i punti *A*, *B*, *C* sono allineati) se e solo se:

$$\frac{k-1}{k-3} = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{5}{3}$$

e le due rette *AB* e *BC* sono perpendicolari se e solo se:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \;\; , \;\; \frac{k-1}{k-3} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 5 \;\; .$$

7. Applicando la formula distanza punto-retta, il punto *A* ha distanza $\sqrt{13}$ dalla retta *r* e pertanto l'area del quadrato è 13.

8. Il baricentro si può ricavare come intersezione delle mediane AM_1 e BM_2, essendo M_1 e M_2 i punti medi dei lati *BC* e *CA*. Risolvendo il sistema tra le equazioni di tali mediane si ricavano le coordinate del baricentro:

$$\begin{cases} 3x - 8y + 7 = 0 \\ 12x + 7y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 1\right) .$$

L'ortocentro (punto di incontro delle altezze del triangolo) si può determinare effettuando l'intersezione tra la retta passante per *A* e perpendicolare al lato *BC* e la retta passante per *B* e perpendicolare al lato *AC*; si ottiene:

$$\begin{cases} 2x - 9y + 12 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{48}{13}, \frac{28}{13}\right) .$$

Il circocentro (punto di incontro degli assi dei lati del triangolo) si può determinare effettuando l'intersezione degli assi dei lati *BC* e *AC*; si ottiene:

$$\begin{cases} 4x - 18y + 13 = 0 \\ 2x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{35}{26}, \frac{1}{26}\right) .$$

9. I centri di tali circonferenze appartengono alla retta $x = 4$ ed il raggio è uguale a 2. Imponendo la tangenza con la circonferenza assegnata di centro $C = (8\,, 3)$ e raggio 3 i centri delle circonferenze richieste hanno coordinate $(4\,, 0)$ e $(4\,, 6)$ e quindi le circonferenze richieste sono:

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0 \quad .$$

10. Il raggio *r* della circonferenza richiesta è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono la metà della corda data e la distanza del punto *A* dalla retta *t* :

$$r = \sqrt{1 + \frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{14}{5}}$$

e quindi l'equazione della circonferenza richiesta è:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{14}{5} \quad .$$

11. Essendo il luogo geometrico dei punti del piano, che vedono un segmento assegnato secondo un angolo retto, la circonferenza avente tale segmento come diametro, i punti che risolvono il problema proposto sono quelli di intersezione tra la retta *r* e la circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ di diametro *AB* :

$$P_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, -2 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) , \qquad P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) .$$

12. Le coordinate dei vertici sono $V = (k\,, -k^2)$ e quindi l'equazione del luogo geometrico dei vertici è $y = -x^2$.

Le coordinate dei fuochi sono $F = \left(k\,, -k^2 + \frac{1}{4}\right)$ e quindi l'equazione del luogo geometrico dei fuochi è $y = -x^2 + \frac{1}{4}$.

13. L'ellisse richiesta ha equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con la costante $2a$ che è la somma delle distanze del punto *A* dai due fuochi:

$$2a = AF_1 + AF_2 = 8 \ .$$

Essendo la semidistanza focale $c = 2$, risulta

$$b^2 = a^2 - c^2 = 12$$

e quindi l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \ .$$

L'equazione dell'iperbole richiesta è del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2a = |AF_1 - AF_2| = 2 \ \ , \ \ c = 2 \ \ , \ \ b^2 = c^2 - a^2 = 3 \ .$$

E quindi l'equazione dell'iperbole è

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \ .$$

14. Per $0 < k < 4$ si ottengono equazioni canoniche di ellissi di semiassi

$$a = \sqrt{k} \ \ , \ \ b = \sqrt{4-k} \ .$$

Nel caso particolare $k = 2$ risulta $a = b$ e quindi l'equazione rappresenta la circonferenza di centro *O* e raggio $\sqrt{2}$.

Per $k < 0$ si ottengono equazioni canoniche di iperboli con i fuochi sull'asse y.

Infine per $k > 4$ si ottengono equazioni canoniche di iperboli con i fuochi sull'asse *x*.

15. Una circonferenza γ di centro $C = (x\,, y)$ e raggio *r* è tangente esternamente a γ_1 e γ_2 se e solo se risulta

$$CC_1 = r + 2 \ \ , \ \ CC_2 = r + 4$$

ed è tangente internamente a γ_1 e γ_2 se e solo se risulta

$$CC_1 = r - 2 \ \ , \ \ CC_2 = r - 4 \ .$$

Risultando quindi in entrambi i casi $|CC_1 - CC_2| = 2$ si deduce che il luogo geometrico richiesto è l'iperbole di fuochi C_1 e C_2 e costante 2, ovvero:

$$x^2 - \frac{y^2}{15} = 1 \ .$$

16. a) L'intersezione della parabola assegnata con la condizione $0 \le y \le 3$ determina l'arco di estremi

$$A = \left(-\sqrt{3}\,, 3\right) \ \ , \ \ B = \left(\sqrt{3}\,, 3\right) \ .$$

Nel fascio improprio di rette di equazione $y = 2x + k$ quella passante per A corrisponde a $k = 3 + 2\sqrt{3}$, quella passante per B corrisponde a $k = 3 - 2\sqrt{3}$ e quella tangente alla parabola corrisponde a $k = -1$.

Pertanto il sistema a) ammette:

- due soluzioni coincidenti per $k = -1$,
- due soluzioni per $-1 < k \leq 3 - 2\sqrt{3}$,
- una soluzione per $3 - 2\sqrt{3} < k \leq 3 + 2\sqrt{3}$,
- nessuna soluzione per $k < -1$ e per $k > 3 + 2\sqrt{3}$.

b) La generica circonferenza del fascio ha centro il punto $C = (0\,, -k)$ e raggio $r = \sqrt{1 + k^2}$. Risultando la distanza *d* tra il punto C e la retta $3x + y = 1$ uguale a

$$d = \frac{|1 + k|}{\sqrt{10}}$$

e risultando $d < r$ per ogni *k* si conclude che la retta assegnata risulta secante la circonferenza per ogni valore di *k* e quindi il sistema b) ammette due soluzioni per ogni valore di *k*.

17. Risulta:

$$i) \quad a = 5 \;\; , \;\; \beta = arcsin\frac{3}{5} \;\; , \;\; \gamma = arcsin\frac{4}{5}$$

$$ii) \quad a = \frac{c}{\cos\beta} = 4 \;\; , \;\; b = 2\sqrt{3} \;\; , \;\; \gamma = \frac{\pi}{6}$$

$$iii) \quad c = \frac{2A}{b} = 1 \;\; , \;\; a = \sqrt{5} \;\; , \;\; \beta = arccos\frac{\sqrt{5}}{5} \;\; , \;\; \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta \;\; .$$

18. *i*) Essendo $\gamma = \pi - \alpha - \beta = \pi/6$ risulta $b = c$ (ovvero il triangolo risulta isoscele) e quindi per il teorema dei seni si ricava:

$$c = b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \;\; .$$

ii) Applicando il teorema di Carnot risulta

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{7}$$

e per il teorema dei seni si ricava:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin\gamma = \frac{3}{14}\sqrt{21} \;\; , \;\; \sin\beta = \frac{b}{c} \cdot \sin\gamma = \frac{1}{7}\sqrt{21} \;\; .$$

19. Risultando $\sin\alpha = \sin\beta$ se e solo se:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

le soluzioni sono:

$$2x + \frac{\pi}{3} = x - 1 + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} - 1 + 2k\pi$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi - x + 1 + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{9}\pi + \frac{1}{3} + 2k\pi$$

20. Essendo l'equazione lineare in seno e coseno, posto $X = \cos x$ e $Y = \sin x$ si ottiene il sistema tra una retta e una circonferenza:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ X - \sqrt{3}Y + 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i punti

$$A = (-1\,,0) \quad , \quad B = \left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

che corrispondono, rispettivamente, al variare di $k \in \mathbf{Z}$ agli angoli

$$x = \pi + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad .$$

21. Dopo aver controllato che i valori

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

non sono soluzioni di tale equazione, dividendo ambo i membri per $\cos^2 x$ si ottiene l'equazione

$$\tan^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$$

verificata se e solo se $\tan x = 1$ o $\tan x = \sqrt{3}$ e quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

22. La disequazione assegnata è equivalente a:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} > 2\sin x - \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos x} > 0$$

Essendo il numeratore maggiore di zero per ogni valore

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

le soluzioni si ottengono imponendo che il denominatore sia positivo. Limitatamente all'intervallo $[0\,,\ 2\pi[$ le soluzioni sono:

$$\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi\,,2\pi\right) \quad .$$

23. Utilizzando le formule di prostaferesi si ottiene la disequazione

$$2\sin 2x \cdot \cos x \geq \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \sin 2x \cdot (2\cos x - 1) \geq 0$$

Confrontando il segno dei due fattori, limitatamente all'intervallo $[0\,,\ 2\pi[$ le soluzioni sono:

$$\left[0\,,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi\,,\frac{5}{3}\pi\right] \quad .$$

24. Effettuando la sostituzione $y = 2^{\sin x}$ si ottiene la disequazione :

$$|y - y^2| < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < y^2 - y < \frac{1}{2}$$

le cui soluzioni sono

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} < y < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 2^{\sin x} < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

da cui si ricava

$$\sin x < \log_2 \frac{1+\sqrt{3}}{2} \ .$$

Posto

$$\alpha = \arcsin \log_2 \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

le soluzioni della disequazione sono:
$2k\pi \leq x < \alpha + 2k\pi \ \ , \ \ \pi - \alpha + 2k\pi < x \leq (2k+2)\pi \quad (k \ \in \mathbf{Z})$.

25. Essendo il triangolo *ABC* un triangolo rettangolo, si ricavano le misure dei due lati obliqui $BC = DA = 2r\cos x$. Indicata con H la proiezione di C sul diametro AB della semicirconferenza, risulta $HB = 2r\cos^2 x$ e quindi la base minore del trapezio è $CD = 2r(1 - 2\cos^2 x)$.
Il perimetro del trapezio è pertanto:

$$2p = 2r + 2 \cdot 2r\cos x + 2r(1 - 2\cos^2 x) = 4r(1 + \cos x - \cos^2 x)$$

e quindi risulta $2p = 5r$ se e solo se:

$$1 + \cos x - \cos^2 x = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \ .$$